

ГРАФЫ

Теория.

Во многих ситуациях удобно изображать объекты точками, а связи между ними — линиями или стрелками. Такой способ представления называется *графом*. Например, схема метро — это граф. Точки называют *вершинами* графа, а линии — *ребрами*.

Вершину называют *чётной*, если из неё выходит чётное число рёбер и *нечётной* в противном случае. Граф называют *связным*, если между любыми вершинами существует путь, состоящий из рёбер графа, *ориентированным* — если на каждом ребре указано направление, *плоским* — если он нарисован на плоскости и его ребра не пересекаются (во внутренних точках).

При решении многих олимпиадных задач используются следующие утверждения, относящиеся к обходу рёбер графа:

- 1) если в графе больше двух нечётных вершин, то его правильный обход (т. е. обход, при котором каждое ребро проходится ровно один раз) невозможен;
- 2) для всякого чётного связного графа существует правильный обход, который можно начать с любой вершины и который обязательно кончается в той же вершине, с которой начался;
- 3) если в связном графе ровно две нечётные вершины, то существует правильный обход, причём в одной из них он начинается, а в другой — кончается;
- 4) в любом графе количество нечётных вершин чётно.

Пример 1. В углах шахматной доски 3×3 стоят 4 коня: 2 белых (в соседних углах) и два чёрных. Можно ли за несколько ходов (по шахматным правилам) поставить коней так, чтобы во всех соседних углах стояли кони разного цвета?

Решение. Отметим центры клеток доски и соединим отрезками пары отмеченных точек, если из одной в другую можно пройти ходом коня. Мы получим граф, содержащий «цикл» из восьми точек и одну изолированную точку (рис. 6). Перемещение коней по доске соответствует движению по ребрам этого цикла. Ясно, что при движении по циклу нельзя изменить порядок следования коней.

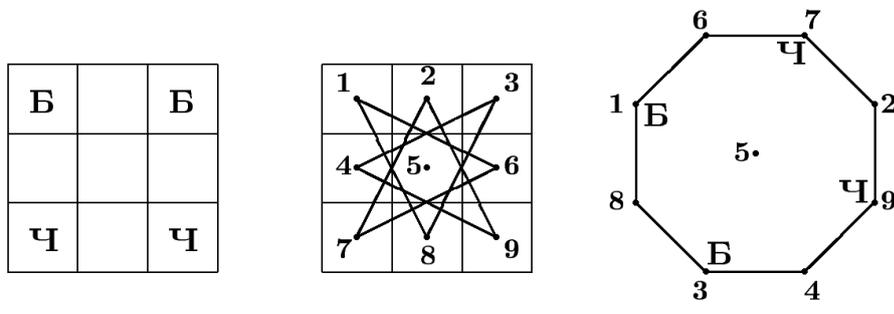


Рис. 6

Пример 2. Выпишите в ряд цифры от 1 до 9 так, чтобы число, составленное из двух соседних цифр, делилось либо на 7, либо на 13.

Решение. Напишем цифры на листе. Соединим стрелками те цифры, которые могут следовать друг за другом (рис. 7а). Теперь ясно, что первой идёт 7, затем 8 и 4. Уберём «лишние» стрелки, ведущие в уже использованные цифры 8 и 4 (рис. 7б). Если из 4 пойти в 2, то несложным перебором убедимся, что этот путь тупиковый. Значит, после 4 идёт 9. Далее идёт 1, и остаток пути определяется однозначно.

Ответ: 784913526.

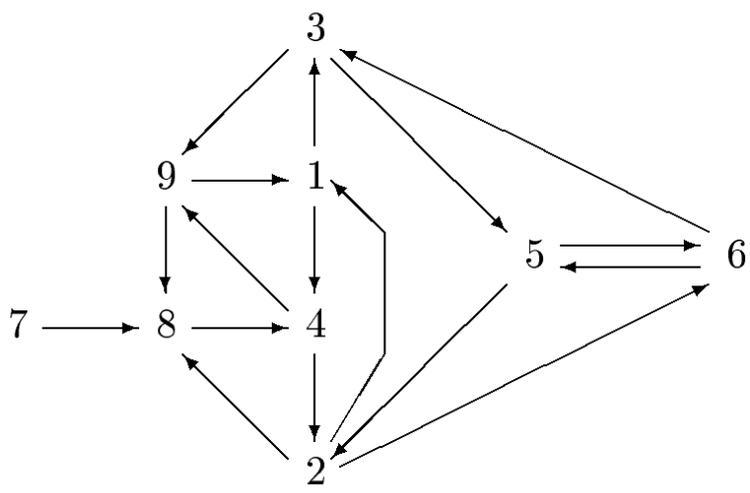


Рис. 7а

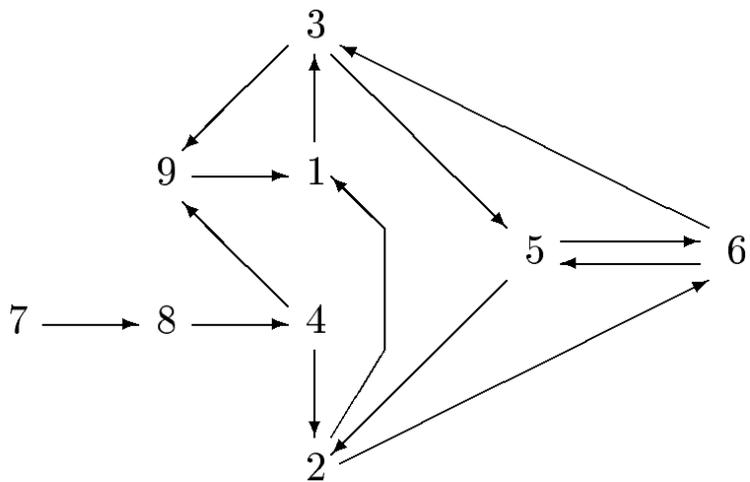


Рис. 7б

Пример 3. В стране Радонежии некоторые города связаны между собой авиалиниями. Из столицы выходит 1985 авиалиний, из города Дальнего — одна, а из остальных городов — по 20 линий. Докажите, что из столицы можно добраться до Дальнего (быть может, с пересадками).

Решение. Рассмотрим множество городов, до которых можно добраться из столицы. Это граф: его вершины — города, ребра — авиалинии, их соединяющие. Из каждой вершины графа выходит столько рёбер, сколько всего авиалиний выходит из соответствующего города. Граф содержит нечётную вершину — столицу. Поскольку число нечётных вершин в графе чётно, в нём есть ещё одна нечётная вершина. Этой вершиной может быть только город Дальний.

Упражнения

1. В государстве 100 городов, а из каждого из них выходит четыре дороги. Сколько всего дорог в государстве?
2. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы:
 - а) каждый телефон был соединен ровно с семью другими;
 - б) было 4 телефона, каждый из которых был соединен с тремя; 8 телефонов, каждый из которых был соединен с шестью; 3 телефона, каждый из которых соединен с пятью другими?
3. У короля 19 вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого вассала 1, 5 или 9 соседей? (Рассмотреть случай границы с королем.)
4. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?
5. Докажите, что число людей, когда-либо живших на Земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четно.
6. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими? (В этой задаче привычные точки и ребра меняются местами.)
7. В стране из каждого города выходят 100 дорог и от любого города можно добраться до любого. Одну из дорог закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого.
8. а) Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см?
б) Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы все же изготовить требуемый каркас?

Примечание. Все упражнения решаются без необходимых комментариев в соответствии с материалом раздела.