ДЕЛИМОСТЬ И ОСТАТКИ

Теория.

Если числа a и b дают одинаковые остатки при делении на число m, то говорят, что a *сравнимо* с b по модулю m и записывают

$$a \equiv b \,(\mathrm{mod}\ m)$$

Два числа a и b сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда их разность делится на m.

Сравнения можно складывать и умножать. Если $a \equiv b\,(\mathrm{mod}\ m)$ и $c \equiv d\,(\mathrm{mod}\ m)$, n — произвольное целое положительное число, то $a+c \equiv b+d\,(\mathrm{mod}\ m)$, $ac \equiv bd\,(\mathrm{mod}\ m)$ и $a^n \equiv b^n\,(\mathrm{mod}\ m)$. Таким образом определяется *арифметика остатков* или *арифметика вычетов.*

В случае, если $m = 10$ приведённое утверждение особенно наглядно: чтобы найти последнюю цифру десятичной записи суммы (произведения), достаточно сложить (перемножить) последние цифры слагаемых (сомножителей) и взять последнюю цифру результата.

Остаток может выступать в роли инварианта (например, остаток от деления на 9 в задачах про сумму цифр).

Пример 1. Докажите, что число $n^3 - n$ делится на 6 при всех целых n.

Решение. Разложим данное выражение на множители: $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$. Мы получили произведение трёх последовательных целых чисел. Одно из них делится на 3, поэтому произведение делится на 3. По крайней мере одно из трёх последовательных чисел чётно, поэтому произведение чётно. Число, делящееся на 2 и 3, делится на 6.

Пример 2. Докажите, что существует бесконечно много чисел, не представимых в виде суммы трёх квадратов.

Решение. Квадрат целого числа при делении на 8 даёт остаток 0, 1 или 4. Чтобы убедиться в этом достаточно проверить квадраты всевозможных остатков от деления на 8 — числа от 0 до 8. Поэтому сумма трёх квадратов не может иметь остаток 7.

Пример 3. Докажите, что число, в десятичной записи которого участвуют три единицы и несколько нулей, не может быть квадратом.

Решение. Если такое число существует, то оно делится на 3, но не делится на 9 (по признакам делимости на 3 и 9). Но если число делится на 3 и является полным квадратом, то оно делится на 9. Противоречие.

Упражнения

1. Докажите, что произведение любых трех последовательных натуральных чисел делится на 6.
2. Докажите, что произведение любых пяти последовательных чисел делится: а) на 30; б) на 120.
3. Какое наименьшее натуральное N такое, что $N!$ делится на 990?
4. На сколько нулей оканчивается число 100!?
5. Вася написал на доске пример на умножение двух двузначных чисел, а затем заменил в нем все цифры на буквы, причем, одинаковые цифры — на одинаковые буквы, а разные — на разные. В итоге у него получилось $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{EEFF}$. Докажите, что он где-то ошибся.
6. $56a = 65b$. Докажите, что $a + b$ — число составное.
7. Найдите остаток от деления 9^{100} на 8.
8. Докажите, что $N^5 + 4N$ делится на 5 при любом натуральном N.
9. Докажите, что $N^2 + 1$ не делится на 3 ни при каком натуральном N.
10. Докажите, что $N^3 + 2$ не делится на 9 ни при каком натуральном N.
11. Докажите, что $N^3 - N$ делится на 24 при любом нечетном N.
12. На какую цифру оканчивается 777^{777}?
13. Найдите остаток от деления 2^{100} на 3.
14. p, $2p + 1$, $4p + 1$ — простые числа. Найдите p.
15. p и $8p^2 + 1$ — простые числа. Найдите p.
16. Найти последнюю цифру числа $1^2 + 2^2 + \ldots + 99^2$.
17. Найдите НОД $(2^{100} - 1, 2^{120} - 1)$.
18. Найдите НОД (111 ... 111, 11 ... 11) — в записи первого числа 100 единиц, в записи второго — 60.

Ответы и указания:

1. *Указание.* Среди этих трех чисел есть хотя бы одно четное число и одно число, делящееся на 3.

3. 11.

4. 24.

5. Доказательство основано на свойстве делимости на 11.

6. $65(a + b) = 65a + 65b = (65 + 56)a = 121a$. 65 и 121 числа взаимно простые, поэтому $a + b$ — число составное.

7. 1.

8–10. Необходим перебор остатков от деления на 5, 3 и 9 соответственно.

11. *Подсказка.* Докажите, что указанное число делится и на 3, и на 8.

14. 3.

15. 2.

16. 0.

17–18. Необходимо воспользоваться алгоритмом Евклида.