Цикл уроков по теме: «Аксиомы стереометрии и их следствия».

Урок 1. Предмет стереометрии. Аксиомы стереометрии.

Цели урока:

1) ознакомить учащихся с содержанием курса стереометрии;
2) изучить аксиомы о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей в пространстве;
3) учить применять аксиомы стереометрии при решении задач.

Ход урока:

Слайд 1.

1. Организационный момент. Сообщение темы и целей урока.

2. Изучение нового материала.

Учитель: Уже три года, начиная с 7 класса, мы с вами изучаем школьный курс геометрии.

Слайд 2.Вопросы учащимся:

- Что такое геометрия? (Геометрия – наука о свойствах геометрических фигур)
- Что такое планиметрия? (Планиметрия – раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур на плоскости)
- Какие основные понятия планиметрии вы знаете? (точка, прямая)

Учитель: Сегодня мы приступаем к изучению нового раздела геометрии – стереометрии.

Слайд 3. Стереометрия – раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве. (Учащиеся делают запись в тетрадь)

Слайд 4. Основные понятия пространства: точка, прямая, плоскость.

Представление о плоскости дает гладкая поверхность стола, стены, пола, потолка и т.д. Плоскость, как геометрическую фигуру, нужно представлять простирающейся во все стороны, бесконечной. Обозначаются плоскости греческими буквами α, β, γ и т. д.

1. Назовите точки, лежащие в плоскости β; не лежащие в плоскости β.

2. Назовите прямые: лежащие в плоскости β; не лежащие в плоскости β.

Слайд 5. Об основных понятиях (точка, прямая, плоскость) мы имеем наглядное представление и определения им не даются. Их свойства выражены в аксиомах.

Наряду с точкой, прямой, плоскостью в стереометрии рассматривают геометрические тела (куб, параллелепипед, цилиндр, тетраэдр, конус и др.), изучают их свойства, вычисляют их площади и объемы. Представление о геометрических телах дают окружающие нас предметы.

Слайд 6. Вопросы учащимся:

- Какие геометрические тела вам напоминают предметы, изображенные на этих рисунках.
- Назовите предметы из окружающей вас обстановки (нашей классной комнаты) напоминающие вам геометрические тела.

Слайд 7. *Практическая работа (в тетрадях)*

1. Изобразите в тетради куб (видимые линии – сплошной линией, невидимые – пунктиром).

2. Обозначьте вершины куба заглавными буквами $АВСДА_1В_1С_1Д_1$

3. Выделите цветным карандашом:

- вершины А, С, $В_1$, $Д_1$; отрезки АВ, СД, $В_1С$, $Д_1С$; диагонали квадрата $АА_1В_1В$.

Обратить внимание учащихся на видимые и невидимые линии на рисунке; изображение квадрата $АА_1В_1В$ в пространстве.

Слайд 8. Вопросы к учащимся:

- Что такое аксиома? Какие аксиомы планиметрии вы знаете?

В пространстве основные свойства точек, прямых и плоскостей, касающиеся их взаимного расположения, выражены в аксиомах.

Слайд 9. Учащиеся делают записи и рисунки в тетрадях.

Аксиома 1. (А1) Через любые 3 точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость и притом только одна.

Слайд 10. Отметить, что если взять не 3, а 4 произвольные точки, то через них может не проходить ни одна плоскость, то есть 4 точки могут не лежать в одной плоскости.
Слайд 11. Аксиома 2. (А2) Если 2 точки прямой лежат в плоскости, то и все точки прямой лежат в этой плоскости. В этом случае говорят, что прямая лежит в плоскости или плоскость проходит через прямую.
Слайд 12. Вопрос учащимся:
- Сколько общих точек имеют прямая и плоскость? (рис.1 – бесконечно много; рис.2 – одну)
Слайд 13. Аксиома 3. (А3) Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.
В этом случае говорят, что плоскости пересекаются по прямой.
3. Закрепление изученного материала.
Слайд 14. Решение задач из учебника № 1(а,б), 2(а).
Учащиеся читают условие задач и по рисунку на слайде дают ответ с объяснением.
Задача 1.
а) Р, Е $\subset$ (АДВ) $\Rightarrow$ РЕ $\subset$ (АДВ) по $А_2$
Аналогично МК $\subset$ (ВДС)
В,Д $\subset$ (АДВ) и (ВДС) $\Rightarrow$ВД $\subset$ (АДВ) и (ДВС)
Аналогично АВ $\subset$ (АДВ) и (АВС)
С, Е $\subset$(АВС) и (ДЕС) $\Rightarrow$СЕ $\subset$ (АВС) и (ДЕС)
б) С $\subset$ (ДК) и (АВС) $\Rightarrow$ ДК $\cap$ (АВС) = С. Т.к. точек пересечения прямой и плоскости не более одной (прямая не лежит в плоскости), то это единственная точка.
Аналогично СЕ $\cap$ (АДВ) = Е.
Задача 2(а)
В плоскости ДС$С_1$: Д, С, $С_1$, $Д_1$, К, М, R. В плоскости BQC: $В_1$, В, Р, Q, $С_1$, М, С.
Слайд 15. *4. Подведение итогов урока.* Вопросы учащимся:
1) Как называется раздел геометрии, который мы будем изучать в 10-11 классах?
2) Что такое стереометрия?
3) Сформулируйте с помощью рисунка аксиомы стереометрии, которые вы изучили сегодня на уроке.

Слайд 16. *5. Домашнее задание.*

Урок 2. Некоторые следствия из аксиом.

Цели урока:
- повторить аксиомы стереометрии и применение их при решении задач домашнего задания;
- ознакомить учащихся со следствиями из аксиом;
- научить применять следствия из аксиом при решении задач, а также закрепить умение применять аксиомы стереометрии при решении задач;
- повторить формулы вычисления площади ромба.

Ход урока.

Слайд 1. *1. Организационный момент.* Сообщение темы и целей урока.
Слайд 2. *2. Проверка домашнего задания.*
Перед уроком у нескольких учащихся взять на проверку тетради с домашней работой.
1)Сформулируйте аксиомы стереометрии и оформите рисунки на доске.
2) №1 (в,г); 2(б,д).
Учащиеся устно с места по рисунку на слайде отвечают на вопросы домашнего задания.
Слайд 3. *3. Изучение нового материала.* Рассмотрим и докажем следствия из аксиом.
Теорема 1. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость и притом только одна.

Учащиеся записывают формулировку в тетради и, отвечая на вопросы учителя, делают соответствующие записи и рисунки в тетрадь.

- Что дано в теореме? (прямая и не лежащая на ней точка)
- Что надо доказать? (проходит плоскость; одна)
- Что можно использовать для доказательства? (аксиомы стереометрии)
- Какая из аксиом позволяет построить плоскость? (А1, через три точки проходит плоскость и притом только одна)
- Что есть в данной теореме и чего не хватает для использования А1 (имеем – точку; необходимы – еще две точки)
- Где построим еще две точки? (на данной прямой)
- Какой вывод можем сделать? (через три точки строим плоскость)
- Принадлежит ли данной плоскости прямая? (да)
- На основании чего можно сделать такой вывод? (на основании А2: если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости)
- Сколько плоскостей можно провести через данные прямую и данную точку? (одну)
- Почему? (так как плоскость, проходящая через прямую и плоскость, проходит через данную точку и две точки на прямой, значит по А1 эта плоскость – единственная)

Слайд 4. Теорема 2. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость и притом только одна.

Учащиеся доказывают теорему самостоятельно, затем прослушиваются несколько доказательств и делаются дополнения и уточнения (если они необходимы)

Обратить внимание на то, что доказательство опирается не на аксиомы, а на следствие 1.

Слайд 5. *4. Закрепление изученного материала.*

Задача 6 (из учебного пособия)

Учащиеся работают в тетрадях, предлагают свои варианты решения, затем сравнивают свое решение с решением на экране. Разбираются два случая: 1) точки не лежат на одной прямой; 2) точки лежат на одной прямой.

Слайд 6,7. Задача на слайде. Учащиеся читают условие, делают рисунок и необходимые записи в тетрадях. Учитель проводит фронтальную работу с классом по вопросам задачи. В ходе решения задачи повторяем формулы вычисления площади ромба.

Дано: АВСД – ромб, АС∩ВД=О, М$\notin \alpha$, (А,Д,О)$\in \alpha$; АВ = 4см, $\angle$А=60º.

Найти: (В,С)$\in \alpha$; Д $\in$ (МОВ); (МОВ)∩(АДО); $S_{АВСД}$.

Решение:

$1) Д \in \alpha, О \in \alpha, по A_2 ДО \subset \alpha, т.к. B \in ДО, то B \in \alpha.$

$Аналогично A \in \alpha, O \in \alpha, по A_2 ДО \subset \alpha, т.к. C \in ДО, то B \in \alpha$

$2) OB \subset (MOB), Д \in OB, то Д \in (MOB).$

$3) O \in (MOB), O \in (АДО).$

$B \in (MOB), B \in (АДО) \Rightarrow (MOB) \cap (АДО) = BO, но\_т.к.\_BO - часть\_ДB, то$

$(MOB) \cap (АДО) = Д.$

$4) Sромб = 4 \cdot 4 \cdot \sin 60^0 = 8\sqrt{3}(см^2)$

Обратить внимание на тот факт, что если две плоскости имеют общие точки, то они пересекаются по прямой, проходящей через эти точки.

5. Подведение итогов:
- Сформулируйте аксиомы стереометрии.
- Сформулируйте следствия из аксиом.

Цель урока достигнута. Аксиомы стереометрии повторили, познакомились со следствиями из аксиом и применили их при решении задач.

Выставление отметок (с комментариями)

Слайд 8. *6. Постановка домашнего задания*:

Урок 3. Решение задач на применение аксиом стереометрии и их следствий.

Цели урока:

- повторить аксиомы стереометрии и их следствия;

- сформировать навык применения аксиом стереометрии и их следствий при решении задач;
- учащиеся знают аксиомы стереометрии и их следствия и умеют применять их при решении задач.

Ход урока.

Слайд 1. *1. Организационный момент.* Сообщение темы и целей урока.

2. Актуализация знаний учащихся.

1) Проверка домашнего задания по вопросам учащихся.

Перед уроком у нескольких учащихся взять на проверку тетради с домашней работой.

2) Двое учащихся готовят у доски доказательство следствий из аксиом.

3) Двое учащихся (1 уровень) и двое учащихся (2 уровень) работают по карточкам индивидуального опроса. Слайд .

4) Фронтальная работа с учащимися.

Слайд 2. *Дано:* куб АВСДА1В1С1Д1

Найдите:

1) Несколько точек, которые лежат в плоскости α; (А, В, С, Д)
2) Несколько точек, которые не лежат в плоскости α; ($А_1$, $В_1$, $С_1$, $Д_1$)
3) Несколько прямых, которые лежат в плоскости α; (АВ, ВС, СД, АД, АС, ВД)
4) Несколько прямых, которые не лежат в плоскости α; ($А_1В_1$, $В_1С_1$, $С_1Д_1$, $А_1Д_1$, $А_1С_1$, $В_1Д_1$, $АА_1$, $ВВ_1$, $СС_1$, $ДД_1$)
5) Несколько прямых которые пересекают прямую ВС; ($ВВ_1$, $СС_1$)
6) Несколько прямых, которые не пересекают прямую ВС. (АД, $АА_1$ …)

Слайд 3. Заполните пропуски, чтобы получилось верное утверждение:

$1) если A \in a, a \in \alpha, то A.....\alpha$

Слайд 4. Лежат ли прямые $АА_1$, АВ, АД в одной плоскости? (Прямые $АА_1$, АВ, АД проходят через точку А, но не лежат в одной плоскости)

3. Решение задач.

Слайд 5. Учащиеся решают задачи № 7, 10, 14 из учебного пособия, делая соответствующие рисунки и записи на доске и в тетрадях.

Задача № 7.

$Дано: a \cap в = M, c \cap a = A, c \cap в = B, M \notin c.$

$Доказать:$

$1) (a, в, c) \subset \alpha$

2) Лежат ли в одной плоскости все прямые, проходящие через точку М?

Решение: По следствию 2:

$(à \cap â) \in \alpha \Rightarrow ïîÀ_2, ñ \subset \alpha, ò.ê. \{ À, Â \} \in \alpha,$

2) Все прямые, проходящие через точку М, не обязательно лежат в одной плоскости. (см. пример со слайда 4)

Задача 10. Учащиеся решают задачу самостоятельно (аналогично задаче № 7). Учитель выборочно берет тетради на проверку и оказывает индивидуальную помощь в решении задачи учащимся, которые не справились с заданием.

Задача № 14. Решение: Все прямые a, b, c лежат в одной плоскости. В этом случае по следствию 2 можно провести плоскость, и через три прямые проходит одна плоскость. Одна из трех прямых, например c, не лежит в плоскости α, определяемой прямыми a и b. В этом случае через заданные три прямые проходят три различные плоскости, определяемые парами прямых a и b, a и c, b и c.

Слайд 6. Учащиеся делают рисунок и необходимые построения и записи в тетрадях. При построении учащиеся проговаривают аксиомы, результат построения записывают с помощью символики.

Задача. *Дано:* куб $АВСДА_1В_1С_1Д_1$

т.М лежит на ребре $ВВ_1$, т.N лежит на ребре $СС_1$ и точка К лежит на ребре $ДД_1$

а) Назовите плоскости, в которых лежат точки М; N.

б) найдите т.F-точку пересечения прямых MN и ВС. Каким свойством обладает точка F?
в) найдите точку пересечения прямой KN и плоскости АВС.
г) найдите линию пересечения плоскостей MNК и АВС.
Решение:

$а)(A_1B_1B), (B_1BC); (B_1C_1C), (ДД_1C).$

$б)1. MN \cap BC = \mathrm{A}$

$2. \mathrm{F} \in \mathrm{MN}, \mathrm{F} \in \mathrm{BC} \Rightarrow \mathrm{F} \in (\mathrm{BB_1}C), F \in (ABC).$

$в) KN \cap (ABC) = O$

$г) OF = (ABC) \cap (MNK)$

$1. KN \cap DC = O,$

$2. O \in KN, DC \Rightarrow O \in (ADC), O \in DCC_1$

<u>Слайд 7.</u> Для решения следующей задачи повторим формулу вычисления площади четырехугольника. Вывод формулы разбирают по слайду.

Учащиеся записывают формулу в тетрадь. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$

<u>Слайд 8.</u> *Докажите*, что все вершины четырехугольника АВСД лежат в одной плоскости, если его диагонали АС и ВД пересекаются.
Вычислите площадь четырехугольника, если АС$\perp$ВД, АС = 10см, ВД = 12см.
Ответ: 60 см^2

4. Подведение итогов урока.

- Какие аксиомы и теоремы мы применяли на уроке при решении задач? Сформулируйте.
- Какие задачи были самыми интересными, самыми сложными?
- Что полезного для вас лично было на уроке?
- Что вызвало затруднения? Учитель объявляет отметки за урок с комментарием.

<u>Слайд 9.</u> *5. Постановка домашнего задания:*

<u>Урок 4. Решение задач на применение аксиом стереометрии и их следствий.</u>

Цели урока:

- провести контроль знаний аксиом стереометрии и их следствий;
- закрепить сформированный навык применения аксиом стереометрии и их следствий при решении задач;
- повторить: теорему Пифагора и ее применение; формулы вычисления площадей равностороннего треугольника, прямоугольника.

Ход урока.

<u>Слайд 1.</u> *1. Организационный момент.*Сообщение темы и целей урока.
<u>Слайд 2.</u> *2. Проверка домашнего задания.*
Перед уроком у нескольких учащихся взять на проверку тетради с домашней работой.
Двое учащихся готовят у доски решения задач из домашней работы - № 9, 15.
Остальные учащиеся отвечают на вопросы математического диктанта по слайду.
<u>Слайд 3.</u> *3. Решение задач* (фронтальная работа с классом)
Задача № 1.
Дан тетраэдр МАВС, каждое ребро которого равно 6 см.

$Д \in MB, E \in MC, F \in \mathrm{AB}, \mathrm{AF} = \mathrm{FB}, \mathrm{P} \in \mathrm{MA}$

1. Назовите прямую, по которой пересекаются плоскости: а) МАВ и MFC; б) MCF и АВС.
2. Найдите длину CF и SABC
3. Как построить точку пересечения прямой ДЕ с плоскостью АВС?

Вопросы к учащимся (при необходимости):
- Какие точки одновременно принадлежат обеим плоскостям. На основании какой аксиомы можно сделать вывод?
- Сформулируйте свойство медианы равнобедренного треугольника.

- Сформулируйте теорему Пифагора.
- Почему можно применить теорему Пифагора в данном случае?
- Какими способами можно вычислить площадь равностороннего треугольника?
- Всегда ли можно построить точку пересечения прямой ДЕ с плоскостью АВС?

$1.а) M \in (MAB), M \in (MFC), F \in (MAB), F \in (MFC) \Rightarrow \text{по}A_3 (MAB) \cap (MFC) = MF$

$б) C \in (MMCЮ, C \in (ABC), F \in MFC), F \in (ABC) \Rightarrow поA_3 (MCF) \cap (ABC) = FC$

$2. \Delta ABC - равносторонний \Rightarrow FC$ - медиана, биссектриса, высота.

ΔCFB - прямоугольный : CB = 6ccмFB = 3ccм

По тт.Пифагоа FC = $3\sqrt{3}$см.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CF; S_{ABC} = 9\sqrt{3} см^2$

$3. (ДЕ, BC) \subset (BMC), ДЕ \cap BC = К, т.к. К \in BC, то К \in (ABC) (поA_3)$

Слайд 4. Задача №2.

Дано : $ABCДA_1B_1C_1Д_1 - куб, P \in BB_1, B_1P = PB.$

1) Как построить точку пересечения плоскости АВС с прямой $Д_1$Р?
2) Как построить линию пересечения плоскости $АД_1$Р и $АВВ_1$?
3) Вычислите длину отрезков АР и $АД_1$, если АВ = а

Решение:

1. $Д_1$Р и ДВ лежат в одной плоскости $Д_1$ДВ. Пусть они пересекаются в точке К. Тогда точка к принадлежит прямой ДВ, а значит, К $\in$ (АВС)
2. Точка Р принадлежит $ВВ_1$, а значит, и плоскости $АВВ_1$. Точка А принадлежит АВ, а значит, и плоскости $АВВ_1$. Аналогично АР $\subset$ $АД_1$Р. Значит, $(АД_1Р)\cap(АВВ_1)$=АР.
3. а)Из ΔАВР, по теореме Пифагора АР = $\frac{a}{2}\sqrt{5}$; б) Из $\Delta АДД_1$ по теореме Пифагора $АД_1 = a\sqrt{2}$.

Слайд 5. Задача №3.

Дано: Точки А, В, С не лежат на одной прямой.

$M \in AB, K \in AC, P \in MK$

Докажите, что точка Р лежит в плоскости АВС.

С помощью анимации на слайде учащиеся делают соответствующие построения и необходимые выводы. Делают записи в тетрадях с помощью математических символов, проговаривая соответствующие аксиомы и следствия из аксиом.

Вопросы учащимся (по необходимости):
- Зная, что точки А, В, С не лежат на одной прямой, какой вывод можно сделать?
- Если точки А и В лежат в плоскости, какой вывод о прямой АВ можно сделать?
- Какой вывод можно сделать о точке М?
- Если точки А и С лежат в плоскости, какой вывод о прямой АС можно сделать?
- Какой вывод можно сделать о точке К?
- Зная, что точки М и К лежат в плоскости, какой вывод можно сделать о прямой МК?
- Какой вывод можно сделать о точке Р?

Решение (другой способ доказательства):

АВ∩АС=А. По второму следствию, прямые АВ и АС определяют плоскость α. Точка М принадлежит АВ, а значит, принадлежит плоскости α, и точка К принадлежит АС, а значит, и плоскости α. По аксиоме А2: МК лежит в плоскости α. Точка Р принадлежит МК, а значит, и плоскости α.

Слайд 6. Задача № 4.

Плоскости α и β пересекаются по прямой с. Прямая а лежит в плоскости α и пересекает плоскость β. Пересекаются ли прямые а и с? Почему?

Вопросы учащимся (при необходимости):

- Зная, что прямая а пересекает плоскость β, какой вывод можно сделать? (Прямая и плоскость имеют общую точку, например, точку В)
- Каким свойством обладает точка В? (Точка В принадлежит и прямой а, и плоскости α, и плоскости β)
- Если точка принадлежит двум плоскостям одновременно, то что мы можем сказать о взаимном положении плоскостей? (плоскости пересекаются по прямой, например с)
- Каково взаимное расположение точки В и прямой с? (точка В принадлежит прямой с)
- Зная, что точка В принадлежит и прямой а, и прямой с, какой вывод можно сделать об этих прямых? (прямые пересекаются в точке В)
Слайд 7. Задача №5.
Дан прямоугольник АВСД, О – точка пересечения его диагоналей. Известно, что точки А, В, О лежат в плоскости α. Докажите, что точки С и Д также лежат в плоскости α. Вычислите площадь прямоугольника, если АС = 8 см, ∠ АОВ = 60º.
Задача предназначена для самостоятельного решения с обсуждением решения и оказанием индивидуальной помощи учащимся. Полезно обсудить различные способы нахождения площади прямоугольника:

1. Найти стороны прямоугольника.
2. Использовать тот известный факт, что диагонали параллелограмма (прямоугольника) разбивают его на четыре равновеликих треугольника, и найти сначала площадь одного из треугольников.
3. Использовать формулу $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$.

Предложить учащимся решить задачу разными способами. Ответ: $16\sqrt{3}$ см^2.
4. Подведение итогов урока:
- Какие аксиомы и теоремы мы применяли на уроке при решении задач? Сформулируйте.
- Какие задачи были самыми интересными, самыми сложными?
- Что полезного для вас лично было на уроке?
- Что вызвало затруднения?
Выставление отметок за урок (с комментированием каждой отметки)
Слайд 8. *5. Постановка домашнего задания:*

Урок 5. Решение задач на применение аксиом стереометрии и их следствий. Самостоятельная работа (20 мин.)

Цели урока:
- закрепить усвоение вопросов теории в процессе решения задач;
- проверить уровень подготовленности учащихся путем проведения самостоятельной работы контролирующего характера.

Ход урока.

Слайд 1. *1. Организационный момент.*
Сообщение темы и целей урока.
Слайд 2. *2. Проверка домашнего задания.*
Перед уроком у нескольких учащихся взять на проверку тетради с домашней работой.
Задача 1.
Прямые a и b пересекаются в точке О, А ∈ a, В ∈ b, Р ∈ АВ. Докажите, что прямые a и b и точка Р лежат в одной плоскости.
Решение:
1.$a \cap в = O \Rightarrow \alpha$;
2.$A \in a, A \in \alpha; B \in в, B \in \alpha \Rightarrow AB \subset \alpha$
3.$P \in AB, AB \subset \alpha \Rightarrow P \in \alpha$.
Слайд 3. Задача 2.

На данном рисунке плоскость α содержит точки А, В, С, Д, но не содержит точку М. Постройте точку К – точку пересечения прямой АВ и плоскости МСД. Лежит ли точка К в плоскости α.

Решение:

$1.\{М, С, Д\} \Rightarrow \beta;$

$2.\alpha \cap \beta = СД;$

$3.СД \subset \alpha, СД \subset \beta \Rightarrow К = АВ \cap СД.$

Слайды 4, 5, 6 *3.Устное решение задач на повторение теории (по слайдам)*

Слайды 7,8 *4. Самостоятельная работа* (разноуровневая, контролирующего характера)

Учащиеся выбирают свой уровень сложности.

5. Подведение итогов.

1) Собрать тетради с самостоятельной работой.

2) Объявление отметок с комментированием.

Слайд 9. *6. Домашнее задание.*