ИГРЫ

Теория.

Под понятием *математической игры* мы понимаем игру двух соперников, обладающую следующим свойством. В каждый момент игры состояние характеризуется *позицией*, которая может изменяться только в зависимости от ходов игроков. Для каждого из игроков некоторые позиции объявляются выигрышными. Добиться выигрышной для себя позиции и есть цель каждого. Иногда игры допускают ничью. Это означает, что ни один из игроков не может добиться выигрышной для него позиции, или некоторые позиции объявлены ничейными.

Например, шахматы, шашки, крестики–нолики являются математическими играми. А игры в кости, домино, большинство карточных игр математическими играми не являются, так как состояние игры зависит не только от ходов соперника, но и от расклада или результата бросания кости.

В математических играх существуют понятия *выигрышной стратегии*, т. е. набора правил (можно сказать, инструкции или алгоритма), следуя которым, один из игроков обязательно выиграет (не зависимо от того, как играет его соперник), и *ничейной стратегии*, следуя которой один из игроков обязательно добьётся либо выигрыша, либо ничьей.

В любой математической игре существует либо выигрышная стратегия для одного из игроков, либо ничейные стратегии для обоих (если игра допускает ничью). В зависимости от этого игра называется выигрышной для первого или второго игрока, или ничейной.

Например крестики–нолики (на доске 3×3) являются ничейной игрой. К какому из перечисленных случаев относятся шахматы и шашки неизвестно. Хотя стратегия (либо выигрышная, либо ничейная) в этих играх существует, она не найдена, поэтому соревнования по этим играм пока представляют интерес.

Соответствие. Наличие удачного ответного хода (может обеспечиваться симметрией, разбиением на пары, дополнением числа).

Решение с конца. Последовательно определяются позиции, выигрышные и проигрышные для начинающего. Очередная позиция являются выигрышной, если из неё можно получить ранее определённую проигрышную позицию, и является проигрышной, если любой ход из неё ведёт к попаданию в ранее определённую выигрышную позицию.

Передача хода. Если мы можем воспользоваться стратегией противника, то наши дела не хуже чем у него. Например, выигрыш (или ничья) обеспечивается, когда можно по своему желанию попасть в некоторую позицию либо заставить противника попасть в неё.

Пример 1. Двое кладут по очереди пятаки на круглый стол. Проигрывает тот, кто не сможет положить очередной пятак. Кто выигрывает?

Решение. Выигрывает первый. Он кладёт пятак в центр стола, после чего на любой ход второго у первого всегда есть симметричный ответ.

Пример 2. В куче 25 камней. Игроки берут по очереди 2, 4 и 7 камней. Проигрывает тот, у кого нет хода. Кто победит?

Идея решения. Случаи 0 и 1 камня проигрышны для начинающего. Поэтому случаи 2, 3, 4, 5, 7, 8 камней для начинающего выигрышны: своим ходом он переводит игру в позицию, проигрышную для противника. Аналогично, 6 и 9 камней проигрышны для начинающего, поскольку из них можно перейти только в позицию, выигрышную для противника. Рассуждая аналогично, легко установить периодичность выигрышных и проигрышных позиций и получить ответ.

Пример 3. Докажите, что в игре «крестики-нолики» на бесконечной доске у ноликов отсутствует выигрышная стратегия.

Решение. Пусть у ноликов есть выигрышная стратегия. Тогда этой стратегией могут с тем же успехом воспользоваться крестики, игнорируя свой начальный знак. (Когда крестикам приходится ходить на поле, где крестик уже стоит, они ходят куда угодно.)

Пример 4. Две компании A и B получили право освещать столицу международной шахматной мысли Нью-Васюки, представляющую собой прямоугольную сетку улиц. Они по очереди ставят на неосвещённый перекресток прожектор, который освещает весь северо-восточный угол города (от нуля до 90°). Премию О. Бендера получит та компания, которой на своем ходе нечего будет освещать. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. Самый северо-восточный квартал города будет освещён в любом случае после первого хода. Допустим, у B есть выигрышная стратегия. Тогда у неё есть выигрышный ответ на ход A, состоящий в освещении только северо-восточного квартала. Но с этого же хода может начать игру A и затем воспользоваться выигрышной стратегией B! Противоречие. Значит, выигрышная стратегия есть у A.

Упражнения

1. Имеется три кучки камней: в первой — 10, во второй — 15, в третьей — 20. За ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие; проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.
2. Числа от 1 до 20 выписаны в строчку. Игроки по очереди расставляют между ними плюсы и минусы. После того как все места заполнены, подсчитывается результат. Если он четен, то выигрывает первый игрок, если нечетен, то второй.
3. Конь стоит на поле a1. За ход разрешается передвигать коня на две клетки вправо и одну клетку вверх или вниз, или на две вверх и на одну вправо или влево. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
4. Двое по очереди ставят коней в клетки шахматной доски так, чтобы кони не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
5. Дана клетчатая доска 10×10. За ход разрешается покрыть любые две соседние клетки костяшкой домино размером 1×2 так, чтобы костяшки не перекрывались и не свешивались с доски. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
6. В каждой клетке доски 11×11 стоит шашка. За ход разрешается снять с доски любое количество подряд идущих шашек либо из одного вертикального, либо из одного горизонтального ряда. Выигрывает снявший последнюю шашку.
7. Имеются две кучки камней: в одной — 30, в другой — 20. За ход разрешается брать любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кому нечего брать.
8. Имеются две кучки конфет: в одной — 20, в другой — 21. За ход нужно съесть одну из кучек, а вторую разделить на две не обязательно равные кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Ответы и комментарии:

1. Всего будет сделано $10 + 15 + 20 - 3 = 42$ хода: выигрывает второй игрок.
2. Выигрывает второй игрок (см. раздел «Четность»).
3. Выигрывает второй игрок.
4. Выигрывает второй игрок. Можно использовать и центральную, и осевую симметрию.
5. Выигрывает второй игрок. Центральная симметрия.
6. Выигрывает первый игрок. Первым ходом он снимает центральную шашку, а потом играет центрально-симметрично.
7. Выигрывает первый игрок. Первым ходом он уравнивает число камней в кучках, после чего действует как в примере 7.
8. Выигрывает первый игрок. Выигрышными являются позиции с двумя нечетными кучками. Первый ход — съесть кучку из 21 конфеты и разделить кучку из 20 конфет на любые две нечетные кучки.